19/10/2018.

A πίνακας → Γραμμοπράξεις → R Ανηγμ. κλιμακωτός.

$$R = \underbrace{E_k \cdot \ldots \cdot E_1}_{\text{στοιχ. πίνακες}} \cdot A$$

Έστω $S = E_k \cdot \ldots \cdot E_1$ και $\exists$ ο $S^{-1} = E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_k^{-1}$

$$R = S \cdot A$$

<u>Ορισμός</u>: Το πλήθος των ηγετικών στοιχείων του ανηγμένου κλιμακωτού καλείται βαθμίδα του A και γράφουμε rankA.

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&1&1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1\\\Gamma_3\to\Gamma_3-3\Gamma_1\\\Gamma_4\to\Gamma_4-2\Gamma_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&-1\\0&-2&-2\\0&-1&-2\end{pmatrix}\begin{matrix}\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_4\\\Gamma_2\to-\Gamma_2\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-2&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\Gamma_3\to\Gamma_3+2\Gamma_2\\\Gamma_4\to\Gamma_4+2\Gamma_2\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\Gamma_3\to\frac{1}{2}\Gamma_3\\\Gamma_4\to\Gamma_4-3\Gamma_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{rank}\,A=3$$

Ερώτημα: μπορεί ο R (ανηγμένος) να "έρθει" σε πιο "απλή μορφή"

Απλή μορφή: να μοιάζει στον ταυτοτικό.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\Gamma\\\Gamma_2\to\Gamma_2-2\Gamma_3\end{matrix}\begin{pmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\;\Gamma_1\to\Gamma_1+\Gamma_3\;\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad I_{3\times3}$$

Σύστημα $AX=b$ $\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$ $\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ $\quad b=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$

(A,b) Είναι ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος.

$(A,b) \xrightarrow{\text{γραμμοπράξεις}} (R,b')$ ανηγ. κλιμακωτός

Ένα σύστημα $AX=b$ καλείται συμβιβαστό, αν έχει λύση.

Αν $b=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, τότε το σύστημα καλείται ομογενές και έχει πάντα τετριμμένη μηδενική λύση.

Ερώτημα: Αν ένα σύστημα είναι συμβιβαστό, έχει μοναδική ή περισσότερες λύσεις και από τι εξαρτάται.

π.χ. Να βρεθούν όλοι οι 3x3 πίνακες $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.

$$x_1+x_2+2x_3=b_1$$
$$x_1+\quad+x_3=b_2$$
$$2x_1+x_2+3x_3=b_3$$

$$\left(\begin{array}{cccc}1&1&2&b_1\\1&0&1&b_2\\2&1&3&b_3\end{array}\right)\begin{array}{l}\Gamma_2\leftrightarrow\Gamma_1\\\Gamma_3\to\Gamma_3-2\Gamma_1\\\Gamma_2\to\Gamma_2-\Gamma_1\end{array}\left(\begin{array}{cccc}1&0&1&b_2\\0&1&1&b_1-b_2\\0&1&1&b_3-b_1\end{array}\right)\ \Gamma_3\to\Gamma_3-\Gamma_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc}1&0&1&b_2\\0&1&1&b_1-b_2\\0&0&0&b_3-b_1-b_2\end{array}\right)$$

Εάν $b_3-b_1-b_2\neq 0 \Rightarrow ran=3$

Η τελευταία γραμμή δίνει $0x_1+0x_2+0x_3=$
$=b_3-b_2-b_3\neq 0$
Αδύνατο

Όταν η τελευταία στήλη του κλιμακωτού του επαυξημένου έχει ηγετικό στοιχείο τότε το σύστημα είναι αδύνατο. Για να είναι συμβιβαστό πρέπει
$b_3-b_2-b_1=0 \Leftrightarrow b_3=b_1+b_2$ και τα b_1, b_2 λαμβάνουν οποιεσδήποτε τιμ. Υπάρχουν άπειρα b : το σύστημα να είναι συμβιβαστό. $b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_1+b_2\end{pmatrix}$

Θεώρημα: Έστω (A, b) ο επαυξημένος πίνακας του γραμμικού συστήματος $AX=b$ και (A^{-1}, b^{-1}) ένας πίνακας ο οποίος προκύπτει από στοιχ. γραμμοπράξεις στον (A, b). Τότε τα συστήματα $AX=b$ και $A'X=b'$ είναι ισοδύναμα. Δηλαδή έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων.

Πόρισμα Αν (R, b') είναι ο αναγ. κλιμακωτός του επαυξημένου πίνακα (A, b) του συστήματος $AX=b$ τότε τα δύο συστήματα $AX=b$ και $RX=b$ είναι ισοδύναμα.

πχ. Να βρεθούν όλοι οι 3×1 πίνακες $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$: το σύστημα να είναι συμβιβαστό.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= b_2 \\ 1x_1 + 0x_2 + 8x_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & b_1 \\ 2 & 5 & 3 & b_2 \\ 1 & 0 & 8 & b_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \mapsto \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - \Gamma_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & b_3 \\ 0 & 5 & -13 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 2 & -5 & b_1 - b_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_3 \\ \Gamma_2 \to \frac{1}{2}\Gamma_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & b_3 \\ 0 & 1 & -5/2 & \frac{b_1 - b_3}{2} \\ 0 & 5 & -13 & b_2 - 2b_3 \end{pmatrix} \quad \Gamma_3 \to \Gamma_3 - 5\Gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & b_3 \\ 0 & 1 & -5/2 & b_1 - b_3/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & b_2 - 2b_1 - 5\frac{(b_1 - b_3)}{2} \end{pmatrix} \quad \Gamma_3 \mapsto -2\Gamma_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & b_3 \\ 0 & 1 & -5/2 & b_1 - b_3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2b_2 + 4b_1 + 5(b_1 - b_3) \end{pmatrix} \quad \left.\begin{array}{l} \text{rank}\, A = 3 \\ \text{rank}(A, b) = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Σύστημα συμβιβαστό} \\ \forall b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Πόρισμα: Ένα γραμμικό σύστημα είναι συμβιβαστό αν ο κλιμακωτός του επαυξημένου πίνακα δεν έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη.

Πόρισμα: Έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

1) Ο A είναι αντιστρέψιμος
2) Το ομογενές σύστημα $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχει μόνο τη μηδενική λύση
3) Ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Αποδ) 1) Έστω A αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$. Άρα $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I_{m\times n} X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0. \end{matrix}$

Αποδ2) Το ομογενές έχει μόνο τη μηδενική λύση

$\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ επαυξημένος $= A$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός του A θα είναι ο Ταυτοτικός-μοναδιαίος $I_{m\times n}$. Διαφορετικά θα είχαμε περισσότερες λύσεις

$I_{n\times n} = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A \Leftrightarrow E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_{k-1}^{-1} \cdot E_k^{-1} = A$ Ο A είναι γινόμενο στοιχ. πινάκων.

Αποδ3) Αν ο $A = E_k^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1}$ είναι γινόμενο στοιχ. πινάκων, επειδή ο κάθε στοιχ. πίνακας είναι αντιστρέψιμος, άρα και ο A είναι αντιστρέψιμος, $A^{-1} = (E_k^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1})^{-1} = (E_1^{-1})^{-1} \cdot \ldots \cdot (E_k^{-1})^{-1}$

π.χ. Να βρεθεί ο ανηγμένος κλιμακωτός.

$$\underset{3\times 4}{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix}} \quad \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma_2 \to \Gamma_2 - 2\Gamma_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 - 2\Gamma_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma_3 \mapsto \Gamma_3 + \Gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma_2 \mapsto -\tfrac{1}{5}\Gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \Gamma_1 \mapsto \Gamma_1 - 2\Gamma_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Scanned by CamScanner

$$SA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 3/5 & -7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

S είναι οι στοιχειώδεις πίνακες

Δεν μπορούμε κάνοντας γραμμοπρά-ξεις να κάνουμε μηδενικά τα στοιχεία

$$\boxed{\begin{matrix} 7/5 & 1/5 \\ 3/5 & -7/5 \end{matrix}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: ΠΟΤΕ ΣΤΗΛΟΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 9 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

Στοιχ. πίνακες

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & 1 & & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i \text{ γραμμή} \\ \\ j \text{ γραμμή} \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad i \text{ στήλη} & \end{array}$$

$$M_i(a) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \\ i \text{ στήλη} \end{array}$$

$$A_{ij}(a) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & \alpha & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ i \text{ γραμμή} \\ \\ j \text{ στήλη} \\ \\ \end{array} \\ i \text{ στήλη} \quad j \text{ στήλη} & \end{array}$$

$E \cdot A$, E στοιχ. πίνακας $\quad E \cdot A =$ στοιχειώδης γραμμοπράξη

$E'_{n \times n}$ στοιχ. πίνακας $\rightarrow AE' =$ στοιχ. στηλοπράξη

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αναγμένος κλιμακωτός.

$$\begin{pmatrix} A_{m \times n} \end{pmatrix} \text{ rank} = r \quad \xrightarrow[\text{στηλοπράξεις}]{\text{γραμμοπράξεις}} \quad \text{Επιθυμητή μορφή} \quad \begin{pmatrix} I_{r \times r} & [\, r \times (n-r) \,] \\ [\, (m-r) \times r \,] & [\, 0_{(m-r) \times (n-r)} \,] \end{pmatrix} \leftarrow O_{r \times (n-r)}$$

μηδενικός $(m-r) \times r$

$C_1 \leftrightarrow C_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C_4 \leftrightarrow C_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C_5 \mapsto C_5 - 4C_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C_5 \mapsto C_5 - 6C_2$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$C_6 \mapsto C_6 - 5C_1$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C_6 \mapsto C_6 - 7C_6$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί στηλών
Ισοδύναμοι πίνακες

Όπως ορίσαμε τις γραμμοπράξεις ορίζουμε και τις στηλοπράξεις. Οι στοιχ. πίνακες είναι οι ίδιοι όπως και στις γραμμοπράξεις. Για να κάνουμε στηλοπράξεις πολ/με από δεξιά με τον αντίστοιχο πίνακα.

Θεώρημα: Αν ο $m \times n$ πίνακας B είναι στηλοϊσοδύναμος με τον A τότε $\exists$ $n \times n$ στοιχ. πίνακες $E_1, \dots, E_p$ ώστε $B = A \cdot E_1 \cdot \ldots \cdot E_p$. Οι πίνακες $E_1, \dots, E_p$ είναι αντιστρέψιμοι και αν ονομάσουμε το γινόμενο $E_1 \cdot \ldots \cdot E_p = Q$ τότε $B = A \cdot Q$ και ο Q αντιστρέψιμος.

Έστω A είναι $m \times n$ πίνακας και R ο ανηγ. κλιμακωτός του A. Δηλαδή $R = S \cdot A$ όπου S είναι αντιστρέψιμος $m \times m$ και γινόμενο στοιχ. πινάκων (γραμμοπράξεις). Εφαρμόζουμε στηλοπράξεις στο R. Δηλαδή πολ/με τον R με στοιχ. πίνακες από δεξιά ώστε να έρθει στην μορφή $\begin{pmatrix} I_{r \times r} & O \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r)} \end{pmatrix}$

Εδώ στο $r = \text{rank} A = \text{rank} R$. Από το προηγούμενο Θεώρημα υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q (ο οποίος είναι από το γινόμενο στοιχειωδών πινάκων) ώστε $S \cdot A Q = \begin{pmatrix} I_{r \times r} & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο πίνακες A και B καλούνται ισοδύναμοι αν $\exists$ $m \times m$ πίνακας αντιστρέψιμος S και $n \times n$ πίνακας αντιστρέψιμος Q. Ώστε $A = S \cdot B \cdot Q$ ή $B = SAQ$

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $\text{rank} A = r$, τότε ο A είναι ισοδύναμος με $\begin{pmatrix} I & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$

Πως βρίσκουμε τους S και Q.